

Exercice 1

On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \in [1, 2]$, on a $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$.
2. Dédire de la question précédente la valeur de l'intégrale $J = \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx$.
3. Calculer l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$.

Exercice 2

Dans cet exercice, il faut donner la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles ci-dessous pas seulement la forme mais tous les coefficients. Pour les questions 1, 2, 3 et 4 on utilisera la méthode par **identification** et pour le reste on utilisera la méthode de son choix. On déduira ensuite les primitives de chacune de ces fractions.

1. $G_0(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

2. $G_1(x) = \frac{x^3}{(x+1)(x-5)}$

3. $G_2(x) = \frac{x^3 + x^2 + 1}{(x^2 + 1)(x-3)^2}$

4. $G_3(x) = \frac{2x^3 + x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 1}$

5. $G_4(x) = \frac{x^5 + x^4 + 1}{x^3 - x}$

6. $G_5(x) = \frac{x^3 + x + 1}{(x-1)^3(x+1)}$

7. $G_6(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$

8. $G_7(x) = \frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 - 6x + 1}{2x^3 - x^2}$.

Exercice 3

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $u_1(x) = \sqrt{x^2 + 1},$

3. $u_3(x) = \sqrt{x^2 + x + 1},$

2. $u_2(x) = \sqrt{x^2 - 1},$

4. $u_4(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + a^2}.$

Exercice 4

On pose $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x, a, b, c \in \mathbb{R}.$

Trouver $A, B, C \in \mathbb{R}$ tels que $F(x) = (Ax^2 + Bx + C)e^x$ soit une primitive de $f.$

Utiliser la même méthode pour trouver toutes les primitives de $x \mapsto (\cos 3x + 2 \sin 3x)e^x.$

Exercice 5

On pose $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n}, n \in \mathbb{N}^*.$

1. En intégrant I_{n-1} par parties trouver une relation de récurrence entre I_n et $I_{n-1}.$

2. Calculer $\int_0^1 \frac{dt}{(t^2 + a^2)^3}.$

Exercice 6

Calculer les primitives suivantes :

1. $P_1 = \int \frac{\tan x}{1 + \cos x} dx,$

3. $P_3 = \int \frac{dx}{\cos x},$

2. $P_2 = \int \frac{dx}{1 + \cos x},$

4. $P_4 = \int \frac{dx}{\sin x}.$

Exercice 7

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{(\cos x)(1 - \sin x)},$

3. $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \sin x},$

2. $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{1 + \tan x} dx,$

4. $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \sin^2 x}.$

Exercice 8

Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on pose $I_{n,p} = \int_0^1 x^n (\ln x)^p dx$.

Par une intégration par parties, établir une formule de récurrence reliant $I_{n,p}$ à $I_{n,p-1}$ (attention à la borne 0!). Puis trouver la formule générale pour $I_{n,p}$.

Exercice 9

Soit $(\alpha, \beta, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$. On se propose de calculer

$$\int_{\alpha}^{\beta} (t - \alpha)^n (t - \beta)^n dt.$$

On pose alors pour $(\alpha, \beta, n, m) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}^2$, $I_{m,n} = \int_{\alpha}^{\beta} (t - \alpha)^m (t - \beta)^n dt$.

1. Montrer que $I_{m,n} = -\frac{m}{n+1} I_{m-1,n+1}$.
2. Que vaut $I_{0,p}$ pour $p \in \mathbb{N}$?
3. Dédire alors $I_{n,n}$.

Exercice 10

1. Calculer $\int_1^2 \frac{2u}{\sqrt{1+u}} du$.
2. En déduire $\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+\sqrt{1+t}}}$.

Exercice 11

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x \in [a, b]$ on a $f(a+b-x) = f(x)$.

1. Montrer que $\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$.
2. En déduire la valeur de $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.